Aplicaciones de series y transformadas de Fourier en el tratamiento digital de señales

José Daniel Juárez Morales, Daniel Augusto Sosa González

Departamento de Matemática, Universidad Centroamericana José Simeón Cañas, El Salvador

00037112@uca.edu.sv, dasosa@uca.edu.sv

***Resumen*- Esta ponencia realiza una introducción teórica a los resultados del análisis de Fourier, y muestra algunas de sus aplicaciones en la teoría del tratamiento de señales. Inicialmente se presentan las series de Fourier, la descomposición de funciones trigonométricas de señales periódicas, tras ello se presenta la transformada discreta de Fourier una técnica análoga basada en un muestreo estadístico que sea lo más representativo del espectro continuo que se busca modelar, esta técnica es muy utilizada cuando sólo se tiene un conjunto de muestras en lugar de una función completa. La base teórica requerida se complementa con la transformada rápida de Fourier, un algoritmo matemático que permite calcular la transformada discreta de forma eficiente. Se culmina con una serie de aplicaciones que permiten analizar y modificar señales de sonido e imágenes a partir de su contenido frecuencial a través de la implementación de software.**

Palabras clave— Series de Fourier, Transformadas de Fourier, Teoría de la señal, FFT, DFT.

I. INTRODUCCIÓN

En el área de las ciencias las series de Fourier han sido una herramienta valiosa para modelar matemáticamente señales en sistemas análogos y digitales mediante una serie trigonométrica infinita que es la consecuencia de un ajuste de mínimos cuadrados a través de funciones ortogonales de tipo trigonométrico; y de forma discreta mediante el muestreo que se hace a través la transformada discreta (DFT) y la transformada rápida de Fourier (FFT).

Las diversas aplicaciones no solo sirven para modelar matemáticamente la señal como función, sino para la construcción de dispositivos que filtran las componentes no deseadas tanto en imágenes, audio o señales en el área de las telecomunicaciones, la aeronáutica, sistemas de generación y distribución de energía, diseño de circuitos, etc.

El presente trabajo se enfoca en presentar algunas de las aplicaciones de las series y transformadas de Fourier en el procesamiento, transformación y filtrado de componentes indeseadas en señales de audio e imágenes.

II. DESARROLLO DE CONTENIDOS

Los conceptos de señales y sistemas surgen en una gran variedad de campos y las ideas y técnicas asociadas con estos conceptos juegan un papel importante en diversas áreas de la ciencia y la tecnología . Inicialmente se introducirá la idea básica sobre la descripción matemática de señales y sistemas y sus clasificaciones.

A. Señales y clasificación de señales

Una señal es una función de una variedad de parámetros, uno de los cuales es usualmente el tiempo, que representan una cantidad o variable física, y típicamente contiene información o datos sobre la conducta o naturaleza de un fenómeno [3].

Matemáticamente, una señal se puede representar como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, una señal de audio puede representarse mediante la presión acústica en función del tiempo, y una imagen como una función del brillo de dos variables espaciales [3].

B. Señales de tiempo continuo y tiempo discreto

Hay dos tipos básicos de señales: señales en tiempo continuo o señales analógicas y señales de tiempo discreto o digitales. Una señal $x(t)$ es de tiempo continuo si la variable independiente t es una variable continua y, por ende, estas señales están definidas por un conjunto continuo de valores de esa variable; es decir, el valor de $x(t)$ es especificado en todo instante t de un intervalo de tiempo dado, ya sea mediante una expresión matemática o gráficamente por medio de una curva; en otras palabras, la variable independiente puede tomar cualquier valor real [3].

Si la variable independiente t es una variable discreta, es decir la señal está definida en puntos del tiempo discreto, entonces $x(t)$ es una señal de tiempo discreto, a menudo generada por un muestreo de una señal de tiempo continuo [3].

Dado que una señal de tiempo discreto está definida solamente en tiempos discretos, con frecuencia se identifica una sucesión de números, denotada por $x[n]$, donde n es un entero. En la Figura 1 se ilustran una señal de tiempo continuo y una de tiempo discreto [3].

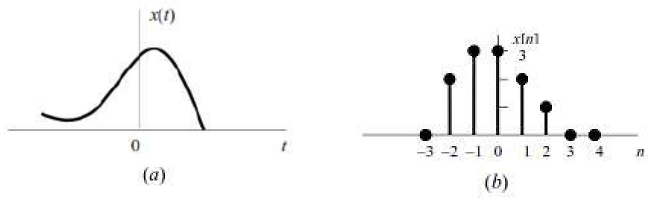

Figura 1. Señales de tiempo continuo y tiempo discreto

C. Señales periódicas y no periódicas

Una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ tiene la propiedad de que existe un número positivo T para el cual: $x(t) = x(t \pm T)\ \forall t$

En este caso decimos que la señal $x(t)$ es periódica con periodo T. En la Figura 2 se ilustra un ejemplo de esta clase de señales. Observar que una señal periódica repite un mismo patrón durante un tiempo múltiplo de T y continua haciéndolo indefinidamente [3].

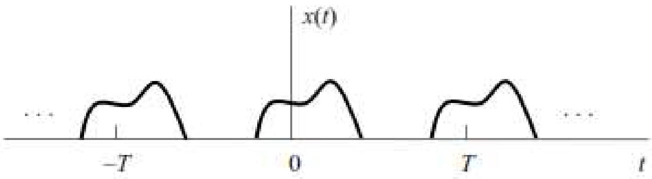

Figura 2. Señal periódica de tiempo continuo

Las señales periódicas de tiempo discreto se definen en forma similar. Específicamente, una señal de tiempo discreto $x[n]$ es periódica con periodo N, si existe un entero positivo N para el cual $x[n] = x[n \pm N] \; \forall n$. En la Figura 3 se ilustra un ejemplo de este tipo de señal [3].

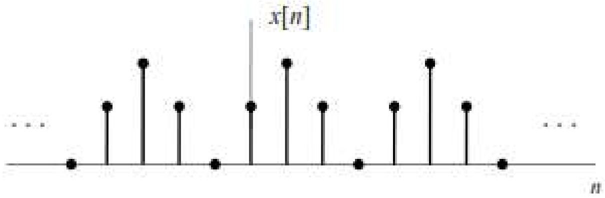

Figura 3. Señal periódica de tiempo discreto

D. Series de Fourier

Las series de Fourier describen señales periódicas como una combinación lineal de exponenciales complejas, multiplicados por factores de peso que determinan la contribución relativa de cada componente a la señal original; con esta herramienta podemos analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial. La combinación lineal permite que operaciones en el dominio del tiempo se conserven en el dominio de la frecuencia compleja. Al conjunto de expansiones en series de Fourier se denomina base ortogonal [2].

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j\frac{2\pi nt}{T}}$$

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

Las expresiones anteriores representan a la serie de Fourier en su forma exponencial compleja, desarrollando la exponencial compleja y reagrupando los términos obtenemos sus representaciones trigonométricas [2].

Serie trigonométrica de Fourier:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

La señal queda definida por una constante e infinitas funciones cosenos y senos que reciben el nombre de armónicos, siendo el de orden $n=1$ el primer armónico, de frecuencia fundamental y el resto de frecuencia superior [2].

A partir de los coeficientes de Fourier, es posible obtener la representación en frecuencias de una señal. La gráfica de estos coeficientes en función de su índice armónico se denomina espectro, existen dos tipos de gráficos, uno de amplitudes y otro de fases; mientras que el espectro de amplitud es una representación de los factores de peso, el espectro de fase indica su ubicación (la posición de una onda con respecto a otra); para el caso de señales continuas y periódicas el espectro será discreto y no periódico extendiéndose infinitamente hacia ambos lados en el eje de las frecuencias. El espectro de amplitud es una función par o simétrica mientras que el espectro de fase es una función impar o asimétrica.

En la Figura 4 se muestran las gráficas del espectro de amplitud y fase de una señal $x(t)$.

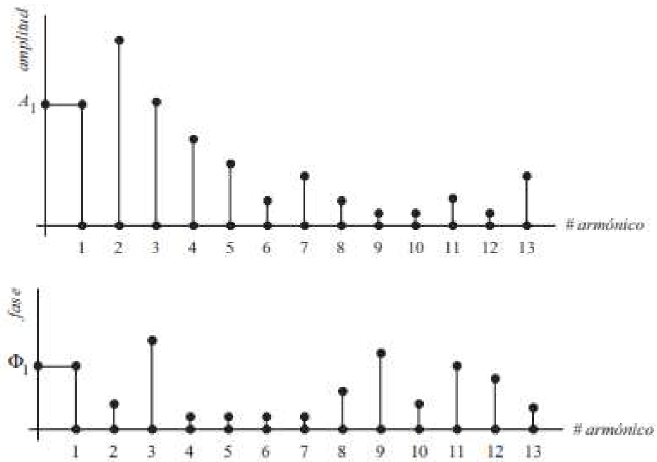

Figura 4. Espectro de amplitud y fase de una señal

E. Armónicos en las series de Fourier

A través de la representación en series de Fourier, una señal $x(t)$ queda definida por una constante e infinitas funciones trigonométricas que reciben el nombre de armónicos. En la figura 5 se ilustra un ejemplo de los armónicos de una señal $x(t)$ [2].

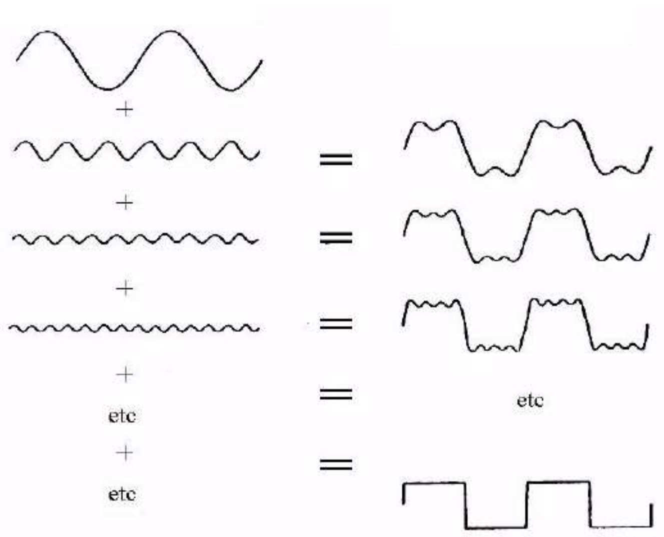

Figura 5. Armónicos de una señal

F. La Transformada de Fourier

Retomando el análisis de señales periódicas, sus armónicos son variables discretas de tal forma que el número de armónico está en función de la frecuencia fundamental:

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Donde el periodo T es finito; basándonos en la expresión anterior si tenemos que $T \to \infty$, el eje de frecuencias se vuelve una variable continua de elementos diferenciales [2].

$$\frac{1}{T} \to df$$

De esta manera la sumatoria que representaba la serie de Fourier se vuelve en una integral [2].

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi ft} dt$$

Esta integral cumple de igual manera las condiciones de Dirichlet excepto la condición de periodicidad, denominada una condición débil [2].

Dada una función $x(t)$ absolutamente integrable, la transformada de Fourier está definida como:

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = \boldsymbol{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Donde: $\omega = 2\pi f$

De manera similar la transformada inversa de Fourier está dada por:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{\boldsymbol{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

G. Señales discretas y periódicas

Es posible reemplazar una señal continua por una discreta, de esta manera tendremos una sucesión de muestras en lugar de la señal completa [2].

La digitalización de una señal $h(t)$ se realiza multiplicando por un tren de impulsos unitarios $\delta(t)$, de periodo T (intervalo de muestreo); la consecuencia de este proceso se puede observar en el dominio de la frecuencia compleja aplicando el Teorema de la Convolución:

$$h(t)\delta(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{H}(\omega) \otimes \Delta(\omega)$$

Esta operación hace que la función $h(t)$ se describa sobre los impulsos a intervalos constantes de $\Delta(\omega)$; como el tren de impulsos está definido en un dominio infinito el resultado es una función periódica en el dominio de la frecuencia compleja [2].

H. Teorema del Muestreo

El teorema establece que una señal se muestrea de manera que cumpla la condición de Nyquist; esta condición dice que la frecuencia de muestreo tiene que ser mayor que la máxima frecuencia contenida en la señal, de otra manera no se capturará la señal por completo. Esto significa que para cada valor Δt empleado en el muestreo de una señal el espectro que describe es diferente, para recuperar la señal tenemos que muestrear con una frecuencia mayor o igual a la frecuencia de Nyquist [2].

$$f_N \geq 2 f_{\text{máx}}$$

I. Serie de Fourier de tiempo discreto

Una señal discreta puede ser representada por sus espectros de amplitud y fase, estos dos elementos de análisis se encontrarán limitados por una banda de frecuencias f_N.

Una señal periódica con periodo N tal que $x[n] = x[n+N]$, puede ser representada por una serie de Fourier, esta serie contiene N funciones exponenciales y se expresa como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Donde:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Los coeficientes discretos de Fourier son cíclicos con periodo N, desarrollando la exponencial compleja y reagrupando términos podemos representar las expresiones sus formas trigonométricas [2].

Serie trigonométrica discreta de Fourier:

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

J. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La transformada discreta de Fourier surge al tender el periodo fundamental al infinito, esto sucede al tratar con señales transitorias y suponer una discretización desde menos infinito hasta más infinito [2].

Para programar este tipo de señales se consideran transitorias y finitas, de esta forma evitamos el concepto de infinito definiendo la transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad , \ k = 0,1,2,3,...,N-1$$

Y su respectiva transformada inversa como:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad , \ n = 0,1,2,3,...,N-1$$

De manera similar al desarrollar la exponencial compleja y reacomodando los términos se pueden expresar en sus diferentes formas trigonométricas [2].

K. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La implementación de la transformada de Fourier involucra $N \times N$ multiplicaciones y sumas complejas; para cada uno de los N valores de k es necesaria N multiplicaciones por $x[n]$ y $N-1$ sumas de resultados [2].

El algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) permite reducir el número de operaciones en $N\log_2 N$; basándose en las propiedades de separabilidad, simetría y periodicidad se elimina información redundante; podemos calcular la transformada de Fourier de dos variables por la aplicación sucesiva de la trasformada de Fourier de una variable [2].

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \ \text{ simetría}$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k \ \text{ periodicidad}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$N = 2^n$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad , \ k = 0,1,2,3,...,N-1$$

El algoritmo trabaja de forma eficiente cuando la señal es una potencia de dos, con un análisis cuidadoso podemos dividir la transformada de Fourier en una parte par y otra impar [2].

Es posible representar la transformada rápida de Fourier como un producto entre una matriz y un vector, de modo que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{x}$ son vectores columna de $N \times 1$ y $\boldsymbol{W}_N$ es una matriz cuadrada de $N \times N$.

Este producto es equivalente a la expresión de la transformada rápida de Fourier, donde W_N^k es el elemento $[k,n]$ de la matriz dado por:

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Si llamamos a los coeficientes $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ entonces $W_N^{kn} = (W_N)^{kn}$

Es posible demostrar que $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ y $W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k$, lo que explica la simetría de la matriz $\boldsymbol{W}_N$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{1\times 1} & \cdots & W_N^{1\times(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)\times 1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_N^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^{*}\boldsymbol{X}$$

III. Aplicaciones en sonidos e imágenes

A pesar de la complejidad matemática tras la transformada de Fourier, en el sentido práctico la idea es simple: dada una señal, se puede calcular su espectro para obtener nueva información. Esto tiene aplicaciones de todo tipo y en casi cualquier campo, haciéndola una herramienta indispensable y la base de incontables técnicas modernas las cuales son implementadas a través de software [1].

A. Sonido

Desarrollar técnicas de análisis de señales requiere un conocimiento sobre el medio en el que se trabaja; para las cuales es necesario saber qué cualidades aprovechar y en qué se traducen dichos cambios. El sonido no es más que una variación en la presión del aire a través del tiempo, que podemos tratar como una señal unidimensional. La clave en este caso se encuentra en que la altura del sonido, que sea más grave o agudo, viene dada por la frecuencia de estas vibraciones [1].

Así, la transformada de Fourier de señales auditivas se traduce a descomposición en sonidos de distintas alturas. Es por ello que la acústica es el campo más evidente para usar análisis de Fourier [1].

Entre algunas de las aplicaciones para sonido se tienen: Filtrado de sonidos, compresión y descompresión de sonidos, cambiar la duración de sonidos [1].

B. Filtro pasa bajos para señales de sonido

Un filtro busca eliminar frecuencias a partir de cierta cota; traduciendo esta situación a sonidos de más de cierta altura.

Se transforma paso a paso el vector de muestras utilizando la transformada discreta de Fourier o su variante la transformada rápida. Estando en el dominio de la frecuencia se modifica cada una de las muestras dependiendo del contenido frecuencial a utilizar, en el caso del filtro paso bajos se atenúan las frecuencias altas a partir de una frecuencia de corte establecida. Y el ultimo paso es calcular la transformada inversa del vector modificado [1].

El resultado será un sonido que tendrá un volumen aparentemente menor a la señal de sonido original, esto se debe a que se está eliminando gran parte de la energía de la señal .

C. Compresión y descompresión de sonidos

La compresión de datos es un campo donde la transformada de Fourier es vital, casi cualquier formato la utiliza en alguna de sus variantes. Se utiliza la compresión con pérdidas, pues la mayoría de técnicas de compresión sin pérdidas se basa en un mejor aprovechamiento de los datos [1].

Si no es necesario mantener exactamente la información, la idea es descartar parte para reducir el peso. En audio, no se puede desechar muestras para comprimir un archivo, pues resultaría algo diferente. Pero aquí entra en juego la transformada de Fourier: se puede descartar frecuencias imperceptibles o poco relevantes para el oído humano, de forma que se tengan audios casi idénticos pero con una reducción notable de peso [1].

Para la compresión y descompresión de sonidos se utiliza una técnica básica: se divide la señal en bloques de corta duración, haciendo uso del algoritmo de la transformada discreta de cosenos de Fourier la cual viene dada por la expresión:

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right),\ k = 0,1,...,N-1$$

Y la transformada inversa, definida como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} y[k]\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right),\ n = 0,1,...,N-1$$

Así, de esta manera se comprende de una mejor manera que las frecuencias representan los sonidos presentes en un intervalo de tiempo específico, y por tanto se logra descartar más coeficientes sin temor a perder el significado del audio original. Por último, también se puede utilizar una menor cantidad de *bits* para almacenar cada valor, y aunque así se reducen el número de tonos representables, si logra hacer de forma razonable no se notaría la diferencia [1].

D. Cambiar la duración de sonidos

La última aplicación para sonido, y la más complicada, será cómo cambiar la duración de un fragmento de audio. La primera forma de abordar el problema sería modificando la frecuencia de muestreo con la que se lee la señal de audio. Pero utilizando el análisis de Fourier, la idea es simple, se busca un nuevo conjunto de muestras a partir del original de manera que se mantenga la altura y el audio, pero se dilatará en el tiempo usando el algoritmo de la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) la cual es definida mediante la siguiente expresión:

$$X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

De un conjunto de muestras, se comienza agrupando dichas muestras en pequeños bloques de corta duración a las que se le aplicará la STFT, en este punto será donde se modifica la duración del sonido. Partiendo de un total de N bloques se interpola un nuevo conjunto de transformadas $c \cdot N$ de ellas, si se quiere multiplicar la duración por c. Por ultimo se invierte la STFT de las muestras modificadas [1].

E. Edición de imágenes a través de filtros

Digitalmente, una imagen puede ser representada por un conjunto de valores que indican el color de cada pixel. Así, en color tenemos tres valores por pixel (rojo, azul y verde) y se pueden expresar en tres matrices, cuyos valores se encuentran entre la intensidad mínima y máxima [1].

Existen muchas maneras de adquirir imágenes (fotografías de distintos tipos, cámaras de video, etc.), para poder manipular estas imágenes es necesario generar imágenes digitales a partir de los datos continuos obtenidos, esto se logra a partir de dos procesos: muestreo y cuantificación. El muestreo es el proceso de digitalizar las coordenadas espaciales de la imagen y la cuantificación es el proceso de digitalizar el nivel de gris. De esta manera una imagen continua puede describirse de manera aproximada por una serie de muestras igualmente espaciadas organizadas en forma de matriz donde cada elemento de la matriz (pixel) es una cantidad discreta:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & \cdots & f(0,M-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-1,0) & \cdots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

Así, el procedimiento es similar al de sonido, pero en este caso en dos dimensiones. Introduciendo entonces la DFT bidimensional:

$$\boldsymbol{F}(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-2\pi j(ux/M+vy/N)}$$

Y la transformada bidimensional inversa:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \boldsymbol{F}(u,v)e^{2\pi j(ux/M+vy/N)}$$

En primer lugar es necesario tomar la transformada discreta de la matriz de intensidades, para ello se calcula la FFT usual en vectores: primero la transformada de cada columna y después la de cada fila. Así se obtiene la transformada de coeficientes de la imagen [1].

Ahora se pueden eliminar las frecuencias indeseadas. Para ello, se forma una matriz con unos en un círculo en torno al centro de la imagen, y nula en el resto. Luego se multiplica cada elemento de esta matriz por los de la transformada y por último se calcula la transformada inversa en dos dimensiones para obtener imágenes filtradas [1].

IV. CONCLUSIONES

- El análisis de Fourier es una herramienta fundamental para el tratamiento de señales, ya que permite determinar el contenido frecuencial de las señales en estudio.

- El análisis de Fourier ha sido una aplicación que se ha usado en muchas ramas de la ingeniería especialmente en la rama de eléctrica y electrónica, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta.

- Una serie de Fourier nos sirve de igual forma para poder representar cualquier señal que de notable importancia en el posterior desarrollo del análisis matemático.

REFERENCIAS

[1] Rodríguez, Carlos (2016). Transformada de Fourier: aplicaciones al procesamiento de señales. (tesis de grado) Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, España.

[2] Zapotitla Roman, Julián. Análisis de Fourier. [Online]. Available:http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/139/A5.pdf?sequence=5.

[3] Hwei P. Hsu. Señales y Sistemas, 2ª edición . McGraw-Hill, 2013.

[4] STEWART, James. El cálculo, Trascendentes tempranas, 6ª edición. Cengage Learning, 2008.